

Correction SIGMA n°3B

Exercice 1

Les 3 questions sont indépendantes.

1. On considère l'ensemble $E = \left\{ \begin{pmatrix} 3y + z \\ 2y \\ -z \end{pmatrix}, y, z \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

(a) On voit que $\begin{pmatrix} 3 \times 0 + 0 \\ 2 \times 0 \\ -0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in E$ donc l'espace est non vide.

Soient $X_1 = \begin{pmatrix} 3y_1 + z_1 \\ 2y_1 \\ -z_1 \end{pmatrix} \in E$, $X_2 = \begin{pmatrix} 3y_2 + z_2 \\ 2y_2 \\ -z_2 \end{pmatrix} \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors

$$\begin{aligned} \lambda X_1 + X_2 &= \lambda \begin{pmatrix} 3y_1 + z_1 \\ 2y_1 \\ -z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3y_2 + z_2 \\ 2y_2 \\ -z_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda(3y_1 + z_1) + (3y_2 + z_2) \\ 2\lambda y_1 + 2y_2 \\ -\lambda z_1 - z_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3(\lambda y_1 + y_2) + (\lambda z_1 + z_2) \\ 2(\lambda y_1 + y_2) \\ -(\lambda z_1 + z_2) \end{pmatrix} \in E \end{aligned}$$

L'espace E est un espace vectoriel.

(b) On a

$$\begin{aligned} E &= \left\{ \begin{pmatrix} 3y + z \\ 2y \\ -z \end{pmatrix}, y, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 3y \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ -z \end{pmatrix}, y, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ y \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, y, z \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Ainsi, $E = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

(c) Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned} \lambda_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 &\iff \begin{cases} 3\lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ 2\lambda_1 &= 0 \\ -\lambda_2 &= 0 \end{cases} \\ &\iff \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \end{aligned}$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est donc libre.

2. On considère l'application $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2x + y - z \\ x - y + z \\ 2x - 2y + 2z \end{pmatrix}$ et on note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(a) L'application f va de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Soient $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(\lambda X_1 + X_2) &= \begin{pmatrix} 2(\lambda x_1 + x_2) + (\lambda y_1 + y_2) - (\lambda z_1 + z_2) \\ (\lambda x_1 + x_2) - (\lambda y_1 + y_2) + (\lambda z_1 + z_2) \\ 2(\lambda x_1 + x_2) - 2(\lambda y_1 + y_2) + 2(\lambda z_1 + z_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda(2x_1 + y_1 - z_1) + (2x_2 + y_2 - z_2) \\ \lambda(x_1 - y_1 + z_1) + (x_2 - y_2 + z_2) \\ \lambda(2x_1 - 2y_1 + 2z_1) + (2x_2 - 2y_2 + 2z_2) \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} 2x_1 + y_1 - z_1 \\ x_1 - y_1 + z_1 \\ 2x_1 - 2y_1 + 2z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x_2 + y_2 - z_2 \\ x_2 - y_2 + z_2 \\ 2x_2 - 2y_2 + 2z_2 \end{pmatrix} \\ &= \lambda f(X_1) + f(X_2) \end{aligned}$$

La fonction f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(b) On a

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad f(e_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(c) On détermine $\text{Ker}(f)$. On a

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker}(f) &\iff f(X) = 0 \\ &\iff \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 3y - 3z = 0 & L_2 \rightarrow L_1 - 2L_2 \\ 3y - 3z = 0 & L_3 \rightarrow L_1 - L_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \\ 0 = 0 & L_3 \rightarrow L_2 - L_3 \end{cases} \end{aligned}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker}(f) \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = z \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Ainsi

$$\text{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ z \end{pmatrix}, \forall z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

D'après la question (b),

$$\text{Im}(f) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

On remarque que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ces deux vecteurs sont liés. On a donc

$$\text{Im}(f) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

Ces deux vecteurs ne sont pas proportionnels. La famille est donc libre et finalement,

$$\text{Im}(f) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

3. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ et l'ensemble $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), AX = 0\}$.

(a) On a $F \subset \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

On a $A \times 0 = 0$ donc le vecteur nul appartient à F .

Soient $X, Y \in F$ (On a donc $AX = 0$ et $AY = 0$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On calcule

$$A(\lambda X + Y) = \lambda AX + AY = 0$$

Donc F est un espace vectoriel.

(b) On résout le système

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 4y + 6z = 0 \\ 3x + 6y + 9z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \begin{array}{l} \\ L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 3L_1 \end{array}$$

Ainsi

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, x + 2y + 3z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -2y - 3z \\ y \\ z \end{pmatrix}, y, z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Exercice 2

1. Au mieux $X = 1$, au pire $X = n$ et toutes les valeurs intermédiaires sont possibles, donc

$$X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$$

2. (a) Si on sait $B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{i-1}$, pour le i -ème tirage, il reste $n - (i - 1)$ boules dans l'urne, dont une boule noire.

Donc

$$P_{B_1 \cap \dots \cap B_{i-1}}(B_i) = \frac{n - (i - 1) - 1}{n - (i - 1)} = \frac{n - i}{n - i + 1}$$

- (b) $(X = k)$ est l'événement $B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap N_k$.

En utilisant la formule des probabilités composées :

$$P(X = k) = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \dots \times \frac{n-(k-1)}{n-k+2} \times \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n} \text{ (par télescopage multiplicatif).}$$

$$\forall n \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad P(X = k) = \frac{1}{n}$$

- (c) Il en résulte que :

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}_{\llbracket 1, n \rrbracket} \quad E(X) = \frac{n+1}{2} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

3. (a) Notons B'_i l'événement « le i -ème tirage donne une boule blanche numérotée 0 ».

$$(X = k) \cap (Y = 0) = B'_1 \cap B'_2 \cap \dots \cap B'_{k-1} \cap N_k.$$

Par le même principe :

$$\begin{aligned} P[(X = k) \cap (Y = 0)] &= \frac{n-2}{n} \times \frac{n-3}{n-1} \times \frac{n-4}{n-2} \times \dots \times \frac{n-k}{n-k+2} \times \frac{1}{n-k+1} = \frac{(n-k) \times 1}{n(n-1)} \\ &= \frac{n-k}{n(n-1)} \text{ (par télescopage multiplicatif)} \end{aligned}$$

- (b) On utilise le système complet d'événements $(X = k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$. La formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned} P(Y = 0) &= \sum_{k=1}^n P(X = k \cap Y = 0) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{n-k}{n(n-1)} \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n (n-k) \end{aligned}$$

On pose $i = n - k$ dans cette dernière somme :

$$\begin{aligned} P(Y = 0) &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=n-1}^0 i \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=0}^{n-1} i \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \times \frac{(n-1)n}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$P(Y = 0) = \frac{1}{2}$$

(c) $P(Y = 1) = 1 - P(Y = 0) = \frac{1}{2}$. Donc

$$Y \leftrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right) \quad E(Y) = \frac{1}{2} \quad V(Y) = \frac{1}{4}$$

4. (a) En ligne 6 : `Nb=Nb-1` (une boule blanche a été tirée)
 En ligne 7 : `u=grand(1,1,'uin',1,Nb+1)` (il reste $Nb + 1$ boule dans l'urne)
 En ligne 8 : `X=X+1` (un tirage de plus)
- (b) En ligne 4 : `Y=0`
 En ligne 8 : `Y=1`

On peut répondre aux deux question a : et b : avec le script complet suivant :

```

1. n=input('entrez une valeur pour n : ')
2. nB=n-1
3. X=1
4. Y=0
5. u=grand(1,1,'uin',1,nB+1)
6. while u<nB+1
7.     nB=nB-1
8.     if u==1 then
9.         Y=1
10.    end
11.    u=grand(1,1,'uin',1,nB+1)
12.    X=X+1
13. end
14. disp(X,'la boule noire est apparue au tirage numéro')
15. disp(Y,'la valeur de Y est')
```

Exercice 3

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \int_0^1 (1 - t^2)^n dt$. On a donc, en particulier, $u_0 = 1$.

1. On calcule

$$\begin{aligned} u_1 &= \int_0^1 (1 - t^2) dt \\ &= \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 \\ &= 1 - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } u_1 = \frac{2}{3}.$$

De même, on calcule

$$\begin{aligned} u_2 &= \int_0^1 (1-t^2)^2 dt \\ &= \int_0^1 (1-2t^2+t^4) dt \\ &= \left[t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 \right]_0^1 \\ &= 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{15-10+3}{5} \end{aligned}$$

$$\boxed{u_1 = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{8}{15}}$$

2. (a) On cherche la monotonie de la suite

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 (1-t^2)^{n+1} dt - \int_0^1 (1-t^2)^n dt \\ &= \int_0^1 (1-t^2)^n (1-t^2-1) dt \\ &= - \int_0^1 t^2 (1-t^2)^n dt \leq 0 \end{aligned}$$

car $t^2(1-t^2)^n \geq 0$ pour $t \in [0, 1]$ donc $\int_0^1 t^2(1-t^2)^n dt \geq 0$ (positivité de l'intégrale).
Donc $u_{n+1} \leq u_n$.

La suite (u_n) est bien décroissante.

(b) Du fait de la positivité de l'intégrale, $u_n \geq 0$, donc (u_n) est décroissante, minorée par 0 donc

u_n est convergente vers une limite $\ell \geq 0$.

3. (a) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2\sigma^2}$ et $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$.

On reconnaît en f une densité de $X \leftrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, donc

$$\boxed{I = 1.}$$

(b) Soit $J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2} dt$. On choisit σ de sorte que $\frac{1}{2\sigma^2} = n$.

Donc $\sigma^2 = \frac{1}{2n}$ soit encore : $\sigma = \sqrt{\frac{1}{2n}}$. Avec cette valeur de σ :

$$J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2\sigma^2} dt = I \times \sigma\sqrt{2\pi} = \sqrt{\frac{2\pi}{2n}} = \sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

Posons $K_n = \int_0^{+\infty} e^{-nt^2} dt$. Comme f est paire, $K_n = \frac{1}{2}J_n$

$$\boxed{J_n = \sqrt{\frac{\pi}{n}} \quad \text{et} \quad K_n = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}}$$

(c) $x \mapsto e^x$ est convexe et $y = 1 + x$ est l'équation de la tangente en 0. Donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x \geq 1 + x$
Avec $x = -t^2$, on obtient

$$\boxed{e^{-t^2} \geq 1 - t^2.}$$

(d) On a donc, pour $n \in \mathbb{N}$, : $(1 - t^2)^n \leq (e^{-t^2})^n = e^{-nt^2}$

En intégrant entre 0 et 1 : $\int_0^1 (1 - t^2)^n dt \leq \int_0^1 e^{-nt^2} dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-nt^2} dt$

Donc $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$ et, par le théorème d'encadrement :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$$

4. En utilisant le changement affine $u = 1 - t$, on obtient

$$\int_0^1 (1 - t)^n dt = \int_1^0 u^n (-du).$$

Donc $\int_0^1 (1 - t)^n dt = \int_0^1 u^n du = \frac{1}{n+1}$.

Pour $t \in [0, 1]$, $t^2 \leq t$ donc $1 - t^2 \geq 1 - t$ et $(1 - t^2)^n \geq (1 - t)^n$

En intégrant entre 0 et 1, on obtient : $u_n \geq \frac{1}{n+1}$

On sait que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1}$ diverge, donc, par la règle de comparaison des séries à termes positifs :

$$\boxed{\sum_{n \geq 0} u_n \text{ diverge}}$$

5. (a) $u_{n+1} = \int_0^1 (1 - t^2)^{n+1} dt$

Prenons $u(t) = (1 - t^2)^{n+1}$ et $v'(t) = 1$, d'où $u'(t) = -2(n+1)t(1 - t^2)^n$ et $v(t) = t$
 u et v sont C^1 sur $[0, 1]$, on peut donc intégrer par parties :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \left[(1 - t^2)^{n+1} \times t \right]_0^1 + 2(n+1) \int_0^1 t^2 (1 - t^2)^n dt \\ &= 0 + 2(n+1) \int_0^1 ((t^2 - 1)(1 - t^2)^n + (1 - t^2)^n) dt \\ &= 2(n+1) \left(\int_0^1 (1 - t^2)^n dt - \int_0^1 (1 - t^2)^{n+1} dt \right) \\ &= 2(n+1)(u_n - u_{n+1}) \end{aligned}$$

C'est le résultat attendu.

(b) Posons (\mathcal{P}_n) $u_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$

• Pour $n = 0$, $\frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{1}{1} = 1 = u_0$ donc \mathcal{P}_0 est vrai.

• Supposons \mathcal{P}_n vrai, montrons \mathcal{P}_{n+1} vrai, c'est à dire $u_{n+1} = \frac{4^{n+1} ((n+1)!)^2}{(2n+3)!}$.

Or $u_{n+1} + 2(n+1)u_{n+1} = 2(n+1)u_n$ ou encore $u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} u_n$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{2(n+1)}{2n+3} u_n = \frac{2(n+1)}{2n+3} \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} \\ &= \frac{[2(n+1)]^2 4^n (n!)^2}{(2n+3) \times (2n+2) \times (2n+1)!} = \frac{4^{n+1} ((n+1)!)^2}{(2n+3)!} \end{aligned}$$

Donc \mathcal{P}_{n+1} est vrai, ce qui achève la récurrence.

6. On calcule $n!$ en faisant

$$\mathbf{v} = \text{prod}(\mathbf{x})$$

On calcule $(2n+1)!$ en faisant

$$\mathbf{w} = \text{prod}(\mathbf{y})$$

Ensuite :

$$\mathbf{u} = 4 \wedge \mathbf{n} * \mathbf{v} \wedge 2 / \mathbf{w}$$

Problème

1. On considère la fonction f définie pour tout x réel par : $f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } x \in [-1; 1] \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus [-1; 1] \end{cases}$

(a) On a

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)dx &= \int_0^1 (1 - |x|)dx \\ &= \int_0^1 1 - x dx \\ &= \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}.}$$

La fonction f étant paire, on a sans calcul,

$$\boxed{\int_{-1}^0 f(x)dx = \frac{1}{2}.}$$

- (b) La fonction $x \rightarrow |x|$ est continue sur $[-1, 1]$ donc $x \rightarrow 1 - |x|$ est continue sur $[-1, 1]$ en tant que somme de fonctions continues. La fonction f est donc continue sur $] - \infty; -1[$, sur $] - 1, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.

On a pour tout $x \in [-1, 1]$, $0 \leq |x| \leq 1 \iff 0 \geq -|x| \geq -1 \iff 1 \geq f(x) \geq 0$. La fonction f est donc positive sur \mathbb{R} .

Comme la fonction f est nulle sur $] - \infty; -1[$ et sur $]1, +\infty[$, on a

$$\int_{-\infty}^{-1} f(x)dx = 0, \quad \int_1^{+\infty} f(x)dx = 0$$

Ainsi, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ est convergente et en utilisant la relation de Chasles,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Donc f est une densité de probabilité.

On considère dorénavant une variable aléatoire X , définie sur un espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{A}; P)$, et admettant f comme densité.

2. L'intégrale $\int_{-\infty}^{-1} xf(x)dx$ est absolument convergente et vaut 0. De même, $\int_1^{+\infty} xf(x)dx$ est absolument convergente et vaut 0. La fonction $x \rightarrow xf(x)$ est continue sur $[-1, 1]$, l'intégrale $\int_{-1}^1 xf(x)dx$ est absolument convergente. Enfin, la fonction $x \rightarrow xf(x)$ est une fonction impaire, ainsi l'espérance de X existe et

$$\boxed{E(X) = \int_{-1}^1 xf(x)dx = 0.}$$

3. Montrer que la fonction de répartition de X , notée F_X , est définie par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{2} + x + \frac{x^2}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

En utilisant la définition de la fonction de répartition, $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$.

— **Cas où $x < -1$** : Dans ce cas $F_X(x) = 0$

— **Cas où $-1 \leq x \leq 0$** : Dans ce cas,

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^x f(t)dt \\ &= \int_{-1}^x (1+t)dt \\ &= \left[t + \frac{t^2}{2} \right]_{-1}^x \\ &= x + \frac{x^2}{2} - \left((-1) + \frac{(-1)^2}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} + x + \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

— **Cas où $0 < x \leq 1$** : Dans ce cas,

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^x f(t)dt \\ &= \int_{-1}^0 (1+t)dt + \int_0^x 1-t dt \\ &= \left[t + \frac{t^2}{2} \right]_{-1}^0 \\ &= \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

— **Cas où $x < -1$** : Dans ce cas $F_X(x) = 1$. d'où le résultat.

On pose $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{A}; P)$.

On note F_Y sa fonction de répartition.

4. (a) Pour $x < 0$, on a

$$\boxed{F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(|X| \leq x) = 0.}$$

(b) On est maintenant dans le cas $x \geq 0$, on a ainsi

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(Y \leq x) = P(|X| \leq x) \\ &= P(-x \leq X \leq x) \\ &= F_X(x) - F_X(-x) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \geq 0, F_Y(x) = F_X(x) - F_X(-x).}$$

(c) D'après la question précédente, il faut distinguer 2 cas. Si $x \in [0, 1]$. Dans ce cas :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= F_X(x) - F_X(-x) \\ &= \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2} - \left(\frac{1}{2} + (-x) + \frac{(-x)^2}{2} \right) \\ &= 2x - x^2 \end{aligned}$$

Enfin, si $x > 1$, alors

$$F_Y(x) = F_X(x) - F_X(-x) = 1 - 0 = 1$$

Récapitulons,

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x - x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour déterminer la densité de Y , il suffit de dériver la fonction F_Y là où elle est dérivable. On obtient bien

$$g(x) = \begin{cases} 2(1-x) & \text{si } x \in [0; 1] \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus [0; 1] \end{cases}$$

(d) On a clairement que $\int_{-\infty}^0 xg(x)dx$ et $\int_1^{+\infty} xg(x)dx$ sont absolument convergentes et valent 0. De plus, la fonction $x \rightarrow xg(x)$ est continue sur $[0, 1]$ (c'est un polynôme) donc l'intégrale $\int_0^1 xg(x)dx$ est absolument convergente. Ainsi Y admet une espérance et

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_0^1 xg(x)dx \\ &= \int_0^1 2x - 2x^2 dx \\ &= \left[x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^1 \\ &= 1 - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } E(Y) = \frac{1}{3}.$$

5. On considère deux variables aléatoires U et V , elles aussi définies sur $(\Omega; \mathcal{A}; P)$, indépendantes et suivant toutes les deux la loi uniforme sur $[0; 1]$.

On pose $I = \min(U; V)$, c'est-à-dire que, pour tout ω de Ω , on a $I(\omega) = \min(U(\omega); V(\omega))$.

On admet que I est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur $(\Omega; \mathcal{A}; P)$, et on rappelle que, pour tout réel x , on a $P(I > x) = P((U > x) \cap (V > x))$. Pour finir, on note F_I la fonction de répartition de I .

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} F_I(x) &= P(I \leq x) \\ &= P(\min(U, V) \leq x) \\ &= 1 - P(\min(U, V) > x) \\ &= 1 - P((U > x) \cap (V > x)) \end{aligned}$$

Les variables aléatoires U et V étant indépendantes, on a

$$\begin{aligned} F_I(x) &= 1 - P(U > x)P(V > x) \\ &= 1 - (1 - F_U(x))(1 - F_V(x)) \end{aligned}$$

Or, on peut rappeler que

$$F_U(x) = F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il y a donc 3 cas.

— **Cas 1** : $x < 0$. Dans ce cas, $F_U(x) = F_V(x) = 0$ et

$$F_I(x) = 1 - (1 - 0)(1 - 0) = 0$$

— **Cas 1** : $0 \leq x \leq 1$. Dans ce cas, $F_U(x) = F_V(x) = x$ et

$$F_I(x) = 1 - (1 - x)(1 - x) = 1 - (1 - 2x + x^2) = 2x - x^2$$

— **Cas 1** : $x > 1$. Dans ce cas, $F_U(x) = F_V(x) = 1$ et

$$F_I(x) = 1 - (1 - 1)(1 - 1) = 1$$

Récapitulons,

$$F_I(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x - x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

(b) Les variables aléatoires I et Y ont la même fonction de répartition.

Donc I suit la même loi que Y .

6. On considère plus généralement n variables aléatoires $X_1; X_2; \dots; X_n$, $n \geq 2$, toutes définies sur $(\Omega; \mathcal{A}; P)$ indépendantes et suivant la loi uniforme sur $[0; 1]$. On pose $I_n = \min(X_1; X_2; \dots; X_n)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} F_{I_n}(x) &= P(I_n \leq x) \\ &= 1 - P(I_n > x) \\ &= 1 - P(\min(X_1, \dots, X_n) > x) \\ &= 1 - P((X_1 > x) \cap (X_2 > x) \cap \dots \cap (X_n > x)) \end{aligned}$$

Or les n variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes et donc

$$\begin{aligned} F_{I_n}(x) &= 1 - (1 - F_{X_1}(x))(1 - F_{X_2}(x)) \dots (1 - F_{X_n}(x)) \\ &= 1 - \prod_{j=1}^n (1 - F_{X_j}(x)) \end{aligned}$$

Il y a là encore 3 cas.

— **Cas 1** : $x < 0$. Dans ce cas, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $F_{X_j}(x) = 0$ et

$$F_I(x) = 1 - \prod_{j=1}^n (1 - 0) = 1 - 1 = 0$$

— **Cas 1** : $0 \leq x \leq 1$. Dans ce cas, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $F_{X_j}(x) = x$ et

$$F_I(x) = 1 - \prod_{j=1}^n (1 - x) = 1 - (1 - x)^n$$

— **Cas 1** : $x > 1$. Dans ce cas, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $F_{X_j}(x) = 1$ et

$$F_I(x) = 1 - \prod_{j=1}^n (1 - 1) = 1 - 0 = 1$$

Récapitulons,

$$F_{I_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1 - x)^n & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

7. Simulation informatique de la loi de Y .

Compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle simule la loi de Y .

```
function Y = simulation()
U = ..rand()..
V = ..rand()..
if U < V then
    Y = ..U..
else
    Y = ..V..
end
endfunction
```